

## レーストラック型マイクロロン加速器における電子軌道の数値解析

著者 宮脇颯士

指導教員 野村保之

## 1. はじめに

マイクロロン（電子サイクロトロン）は、電子を数十から数百 MeV 程度に加速する加速器である。マイクロロンには円形とレーストラック型が存在し、後者では直線領域に直線加速器を使用することで高い加速エネルギーを得ることができる。また外部から加えられた磁場によるサイクロトロン運動によって加速部分に電子が旋回して戻ってくるため複数回の加速が行われる。このような電子の軌道を写像を使って数値解析するのが本研究の目的である。

## 2. レーストラック型マイクロロンの原理

図 1 にレーストラック型マイクロロンの概念図を示す。下の直線部分は直線加速器を表し、上の直線部分はドリフト空間を表す。左右の半円の部分は磁場によって軌道がサイクロトロン運動を行っている領域である。

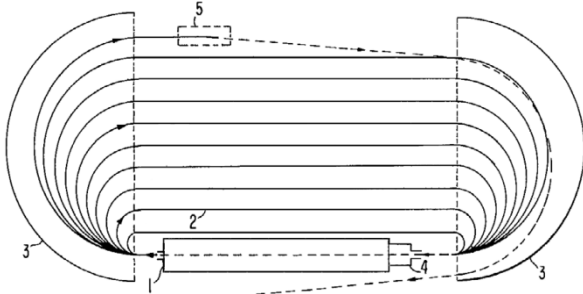


図 1 レーストラック型マイクロロン [1]

マイクロロンは、時間的に一定で一様な磁場  $B$  中で電子が周回しながら、一定周波数  $f$  の高周波電場で加速する装置である。

## 3. 荷電粒子の相対論的運動

加速器では荷電粒子は高エネルギーになるため、相対論効果によりエネルギーと運動量は次のように表される。

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (1)$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mv\gamma \quad (2)$$

また、磁場  $B$  中のサイクロトロン運動はサイク

ロトロン角周波数が  $\Omega_c = \frac{eB}{m\gamma}$  となる。したがってサ

イクロトン周期は  $T_c = \frac{2\pi m\gamma}{eB}$  で表され、また直線部分は自由運動となる。従ってレーストラック 1 周に要する時間はサイクロトン周期に自由走行に要する時間を加えたものになる。

## 4. 基礎方程式

電子の周回運動と高周波電場が同期するためには、 $n$  ターン目の周回運動の周期  $T_n$  が高周波の周期  $T_{rf}$  の整数倍である必要がある。電子加速の場合には  $n$  ターン目での周期  $T_n$  は、

$$T_n = \frac{2l}{c} + \frac{2\pi}{eBc^2} E_n \quad (6)$$

となり、上記の条件  $T_n = nT_{rf}$  から、

$$nT_{rf} = \frac{2l}{c} + \frac{2\pi}{eBc^2} E_n \quad (7)$$

となる。加速電場によるエネルギーのゲインを  $\Delta E$  とすると、超相対論においては

$$\Delta T = \frac{2\pi}{eBc^2} \Delta E \quad (8)$$

となりエネルギーゲインと時間のずれが比例する。このとき時間のずれ  $\Delta T$  が  $T_{rf}$  の整数倍であれば同期軌道となる。エネルギーと位相を変数としたとき、この同期の取れた軌道は平衡点として記述される。そこからのずれを変数としたときに次の写像

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \omega_n \pmod{2\pi} \quad (9)$$

を得る。[2] ここで  $\varphi_s$  は同期軌道に対応する高周波電界の位相である。ここで簡単化のために  $k=1$  を仮定し 2 項目の  $\cos$  の項を展開すると

$$\psi_{n+1} = \psi_n + w_n \pmod{2\pi} \quad (10)$$

$$w_{n+1} = w_n + 2\pi(\cos \psi_{n+1} - 1) - \mu \sin \psi_{n+1}$$

となる。ここで  $\mu$  はビームの初期位相を表していて

$$\mu = 2\pi \tan \varphi_s \quad (11)$$

で定義されるパラメータである。

## 5. 電子軌道の分岐現象

平衡点近傍における写像の安定性は線形化写像

の固有値より考察できる。写像を

$$\begin{cases} \psi_n = \psi_{eq} + \xi_n \\ w_n = w_{eq} + \eta_n \end{cases} \quad (12)$$

とすると

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} &= \psi_{eq} + \xi_{n+1} = \psi_{eq} + \xi_n + w_{eq} + \eta_n \\ \eta_{n+1} &= w_{eq} + \eta_n + 2\pi[\cos(\psi_{eq} + \xi_{n+1}) - 1] - \mu \sin(\psi_{eq} + \xi_{n+1}) \end{aligned} \quad (13)$$

この時 2 種類の平衡点が存在し、

(i)  $(\psi_{eq}, w_{eq}) = (0, 0)$  に対して、線形化写像

$$\begin{pmatrix} \xi_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mu & 1-\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

を得る。

このとき写像の固有値は次の固有値方程式の解

$$\lambda^2 - (2 - \mu)\lambda + 1 = 0$$

になり

$$\lambda = \frac{2 - \mu \pm \sqrt{\mu(\mu - 4)}}{2}$$

で表される。この平衡点の安定性は次のように分類される。

- (i)  $0 \leq \mu \leq 4$  で固有値は複素数となり安定する。
- (ii)  $\mu < 0$  で固有値は  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$  となり正不安定となる。
- (iii)  $\mu < 0$  で固有値は  $\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0$  となり逆不安定となる。

(ii)  $(\psi_{eq}, w_{eq}) = (-2\varphi_s, 0)$  に対して

$\mu$  が正である限り不安定である。

安定領域内の点は回転し、1 回の写像による回転数  $\rho$  は次のように表される。

$$\cos 2\pi\rho = \frac{2-\mu}{2}$$

軌道は周期点をもち  $\rho$  が  $\frac{n}{m}$  ( $m, n$  は互いに素な整数) となるとき、原点から  $m$  周期点が分岐する。

平衡点  $(\psi_{eq}, w_{eq}) = (0, 0)$  近傍の安定性について数値解析を行った。

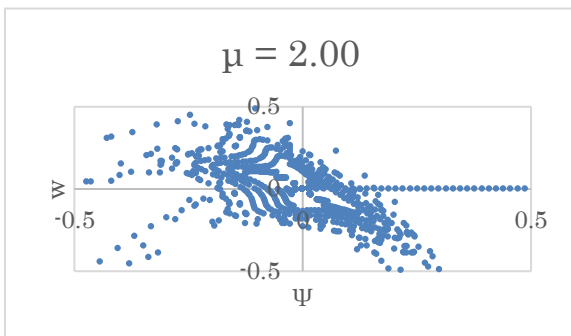


図 1  $\mu = 2.00$  における写像

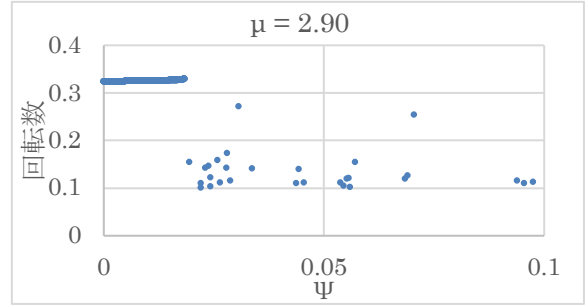


図 2  $\mu = 2.90$  における回転数の分布

3 周期点は  $\mu < 3$  で周辺から発生し、 $\mu = 3$  で不安定な周期点は原点に近づいていき  $\mu > 3$  では周期点は中心から遠ざかっていく。この一連の過程を絞り込み(スクイズ)現象という。

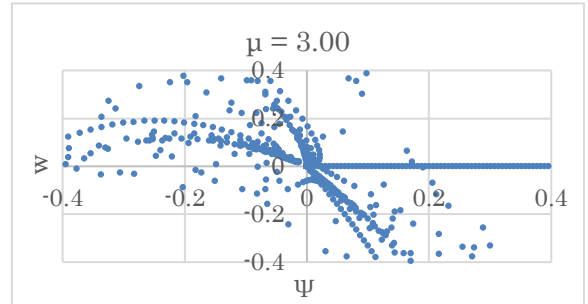


図 3 スクイズ現象

次に、安定領域のパラメータ依存性を調べた。

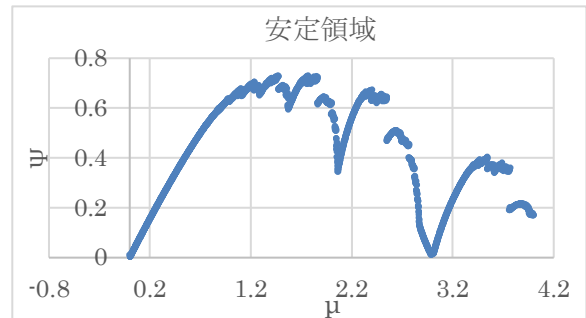


図 4 安定領域

スクイズ現象が発生する点 ( $\mu = 3.0$ ) では不安定であることが分かる。また  $\mu = 2.06$  近傍に安定領域が減少する点が存在していることが分かる。

## 6. 結論

マイクロトロン加速器における電子軌道を写像解析した。周期解の出現の条件を求め、数値解析の結果条件の値で周期点が見られた。3 周期解に関してはスクイズ現象を見出した。最後に安定領域のパラメータ  $\mu$  依存性を調べ、安定領域が減少する点を見つけた。

## 7. 参考文献

- [1] Yu. A. Kubyshin, A. P. Poseryalv and V. I. Shvedunov, Nul. Instrum. Method Phy. Res. A596(2008)147-156
- [2] Yu. A. Kubgshin, O. Larreal, R. Ramirez-Ros and T. M. Seara, physica D349(2017) 12-26.