

CUDA/GPU による水車の 3 次元シミュレーション

著者 澤崎 翔

指導教員 下條 雅史

1. 研究背景

物理シミュレーションの 1 つに流体のシミュレーションが存在する。その中でも粒子法を用いた流体のシミュレーションでは、形状の大幅な変形や分裂などの現象も再現することが可能である。しかし、よりリアルなシミュレーションを行うために粒子数を増やすと膨大な計算量が必要となり、多大な時間を要することになる。そこで、昨年度の研究では、2 次元での水車の運動シミュレーションを CUDA という C 言語の統合開発環境を用いて行われていた。

今回は、昨年度の流体シミュレーションをより発展させ、3 次元での水車の運動シミュレーションを行うことを目的とする。

2. 概要

2.1 粒子法

流体を有限個の粒子の塊として考える。この粒子 1 つ 1 つに速度や圧力などのパラメータを保持させ、各粒子の運動について計算を行う。このように、流体の挙動を粒子の運動によって計算する方法を粒子法という。

粒子は分子や液滴そのものではなく、流動と共に移動する計算点として扱われるため、流体の飛沫などの自由表面を伴う現象を容易に取り扱うことが可能である。

2.2 陽解法によるシミュレーション

陽解法とは、衝突問題などの非線形性が強く、短時間で起こる現象の解析に適した計算方法である。陰解法に比べて計算量が少なく小さなメモリ容量で済むため、本研究での圧力の計算は陽解法を用いる。

このシミュレーションで用いる粒子の運動に対する基本方程式は、(1) 式のナビエーストークス方程式 (流体の運動方程式) である。

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\vec{u} + \vec{g} \quad (1)$$

この方程式の全ての項を陽的に計算する。上式の右辺第 1 項は圧力勾配項、第 2 項は粘性項、第 3 項は重力項である。ここで、 $\mathbf{u}, t, \rho, P, \nu, \mathbf{g}$ はそれぞれ粒子の速度、時間、密度、圧力、粘性係数、重

力加速度を表している。

2.2.1 重み関数

粒子間の相互作用において効果範囲を定め、距離によって作用効果の大きさを決定するために重み関数を利用する。

$$w_{grad}(r) = \frac{r_e - r}{r} \quad (2)$$

$$w(r) = \frac{r_e}{r} + \frac{r}{r_e} - 2 \quad (3)$$

(2) は圧力勾配の計算で用い、(3) はその他の演算子を計算する時に用いる。r は粒子間距離を表しており、上式は粒子間距離 r がパラメータ r_e より短い場合のみ粒子間で相互作用する。また、パラメータ r_e は計算時間と計算の安定性から、(2) では初期配置における粒子間距離の 2.1 倍、(3) では 3.1 倍としている。

2.2.2 粒子数密度

ある粒子において重み関数の和をとったものを粒子数密度という。

$$n_i = \sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) = \frac{\rho(\vec{r}_i) \int_{\Omega} w dv}{m} \quad (4)$$

非圧縮性流れの場合、流体の密度は一定であるため、粒子数密度も一定でなければならない。この一定量を n^0 とする。

2.3 非圧縮性流れ

非圧縮性流れは、ある状態で圧力や温度による密度の変化が無視できるほど小さく、密度がほぼ一定である性質を持つ。今回はこの非圧縮性流れの 1 つである水を扱っている。

非圧縮性流れの支配方程式は(1)のナビエーストークス方程式の他に、時間的に密度が変化しないことを表す次の式がある。

$$\frac{dp}{dt} = 0 \quad (5)$$

流体の挙動をシミュレーションするためには(5)の条件のもとで(1)のナビエーストークス方程式を数値的に解くが、今回の場合水を扱っており、粘性係数は非常に小さいため、 $\nu=0$ とする。

3. 計算アルゴリズム

大まかな計算の流れを図 1 に示す。

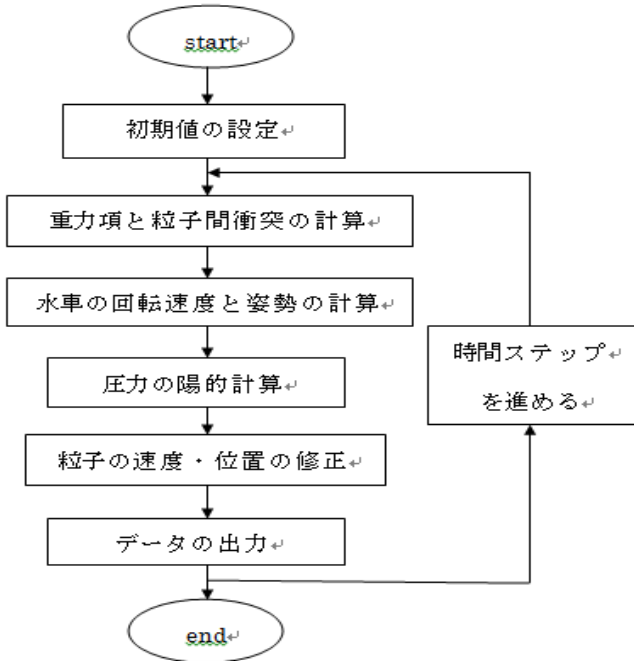


図 1. 計算アルゴリズム

まず、テキストファイルから各粒子の初期座標を読み込み、それぞれに密度、速度、粒子数密度、圧力の初期値を持たせる。その後、粒子数密度 n^0 と慣性モーメント I を求める。ここまでの初期値の設定であり、以下にメインループのアルゴリズムを示す。

初めに時間ステップの計算を行う。次に重力項を陽的に計算し、衝突計算を行って粒子の速度と座標を仮の値にする。次に、水車の位置と速度の計算を行う。

次に、仮の粒子数密度 n_i^* を計算し、 n_i^* が粒子数密度の初期値 n^0 からずれることによって圧力が生じ、これを n^0 に戻すように圧力勾配が生じると考える。そして、その値から圧力を陽的に計算する。

$$P_i^{k+1} = c^2 \frac{\rho^0}{n^0} (n_i^* - n^0) \quad (8)$$

c は音速、 ρ^0 は $P=0$ に対応する密度を表している。ただし、音速 c を実際の物性量ではなく実際よりも小さな仮想的な値を考える。ここでは 12.0 とする。

最後に、得られた圧力を圧力勾配項に代入して速度の修正量を計算し、粒子の座標を修正する。

$$\begin{aligned} u_i' &= -\Delta t \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right)_i^{k+1} \\ u_i^{k+1} &= u_i^* + u_i' \\ r_i^{k+1} &= r_i^* + \Delta t u_i' \end{aligned} \quad (9)$$

4. 水車の運動

水車を十字型、X 型に並べた粒子列で表現し、その交点を回転軸とする。剛体の回転についての運動方程式を以下に示す。(X 型は y 軸回り)

$$I \dot{\omega}_z = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (10)$$

ここでの I は慣性モーメント、 \vec{r}_i は水車の各粒子の回転軸からの相対位置である。

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (11)$$

各粒子が水粒子から受ける力積 $m \frac{dv}{dt} \Delta t$ は図 1 のアルゴリズムの粒子間衝突の計算で求められている。(10)より、

$$\Delta \vec{\omega} = \frac{\omega}{I} \Delta t = \frac{\sum_i \vec{r}_i \times \left(m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t} \right)}{I} \Delta t = m_i \sum_i \frac{\vec{r}_i \times \Delta \vec{v}_i}{I} \quad (12)$$

これより角加速度が分かるため、次の時点での角速度、姿勢が分かる。

5. 現状の課題

昨年度の研究を拡張し、粒子を 3 次元で配置させ、水車を回転させることができた。

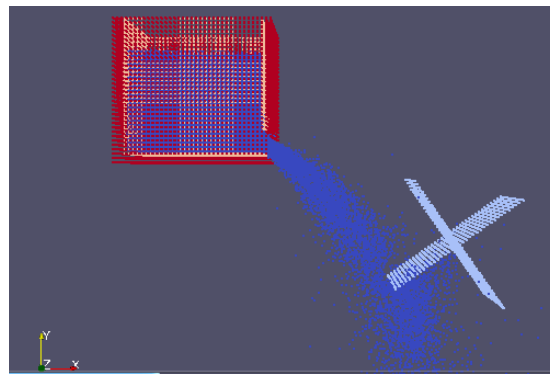


図 2. シミュレーション実行画面

2 種類の水車を用いて、4 パターンのシミュレーションを行うことに成功した。現在は、水粒子が水車に当たった時の衝撃のみで水車が回転しているため、水車に溜まった水粒子の重さも回転要因として計算することが課題として残された。

6. 参考文献

- ・越塚誠一、柴田和也、室谷浩平著「粒子法入門」
- ・越塚誠一著「粒子法」