平成25年度　電子情報工学科　卒業研究発表会

1次元波動方程式に対するCIP法の適用

著者　木津悠磨　　　　指導教員　高久有一

1. はじめに

水面の波、音の伝搬、電磁波等、我々の身の回りに波に関連する現象は多々ある。これらの現象を表す方程式が波動方程式である。波動方程式は、偏微分方程式のうち、双曲型に分類される。双曲型偏微分方程式を解く高次精度差分法の一つにCIP(Constrained Interpolation Profile Scheme)法がある。CIP法は、機械工学、流体力学、電磁気学、弾性体力学をはじめとする幅広い分野で成果をあげている。

2.波動方程式

偏微分方程式は図1のように分類される。

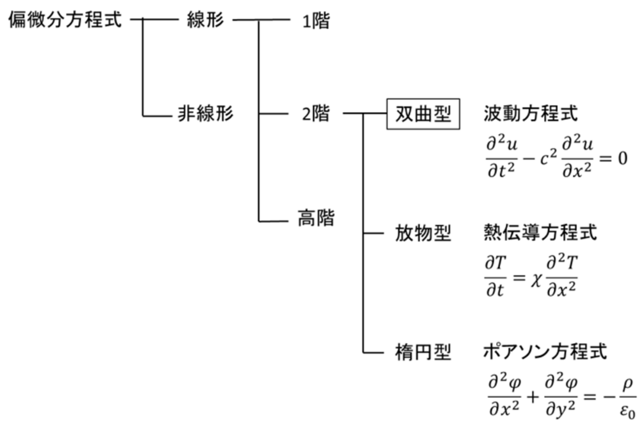

図1　偏微分方程式の分類

波動方程式は双曲型偏微分方程式である。1次元波動方程式は式(1)で表される。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

$$u = f(x - vt) + g(x + vt) \qquad (2)$$

式(2)は1次元波動方程式の解析解であり、ダランベールの解と呼ばれる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

式(3)を一次元移流方程式といい、ダランベールの解の第一項を解析解に持つ。この解はx軸の正方向に速度vで移動する波を表す。

3. 差分法

差分法は、微分方程式を数値解析で解くための離散化手法であり、空間と時間を有限な間隔で区切る。i番目の格子点をx_i, nステップ目の時刻をt^n, その値をf_i^nで表す。波動方程式を解くための差分法には、様々な種類がある。

3.1　1次風上差分法

移流方程式の解析解であるダランベールの解は、t^nにおける波形がt^{n+1}では形を変えずに風上から風下に$v\Delta t$だけ移動する。$v \geq 0$ の場合、格子点x_iでのt^{n+1}における値はt^nにおける$x_i - v\Delta t$での値に等しい。格子点x_{i-1}, x_i間を直線で補間する関数は、

$$F_i(x) = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x}(x - x_i) + f_i^n \qquad (4)$$

従って、 x_i点でのt^{n+1}における値は

$$f_i^{n+1} = F_i(x_i - v\Delta t) = -\frac{v\Delta t}{\Delta x}(f_i^n - f_{i-1}^n) + f_i^n \qquad (5)$$

となる。1次風上差分法は計算を進めるにつれて解が拡散する。

式(5)の右辺第一項の係数をクーラン数という。

$$\mathrm{C} = \frac{v\Delta t}{\Delta x} \qquad (6)$$

$\mathrm{C} \leq 1$ならば解が発散することなく安定して計算を進めることができる。この条件をCFL条件(Courant-Friedrichs-Lewy Condition)という。CFL条件は、時間ステップ幅Δtの間に波が1格子間隔Δx以上伝わってはならないことを意味する。

3.2　ラックス・ヴェンドロフ法

ラックス・ヴェンドロフ法は、格子点x_{i-1}, x_i, x_{i+1}の3点間を2次関数で補間する。補間関数の次数を高くすることで精度を良くしようというものである。ラックス・ヴェンドロフ法は、拡散は抑えられるが解が振動する。

3.3　CIP法

1次風上差分法やラックス・ヴェンドロフ法は格子点の値以外では元の波形の情報を全く考慮していない。そこで、より厳密に解を求めるために、格子点の値だけでなく微分も使用するのがCIP法である。式(1)において、速度vが一定とし、両辺を空間微分すると、

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} + v \frac{\partial f_x}{\partial x} = 0 \qquad (7)$$

となり、微分も1次元移流方程式を満たしていることが分かる。よって微分も移動させながら、t^{n+1}における値を、微分も用いて決定する。補間関数は3次関数とする。

$$F_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} &= F_i(x_i - v\Delta t) \qquad (8) \\ &= a_i(-v\Delta t)^3 + b_i(-v\Delta t)^2 + f_{xi}^n(-v\Delta t) + f_i^n \end{aligned}$$

4. tangent 関数変換

CIP 法を用いれば元の波形を忠実に再現できるので拡散や振動が発生せず、厳密解に近い解が得られるが、矩形波の立ち上がりや立下りのようなシャープな境界を3次関数で記述するのは困難である。矩形波の立ち上がりで定常値を超えるオーバーシュートが生じる。これを解決する方法が tangent 関数変換である。元の波形fに対して、

$$H(f) = tan\left\{0.9\pi\left(f - \frac{1}{2}\right)\right\} \qquad (9)$$

の変換を行う。0.9倍しているのは、$f = 0$ や$f = 1$の時にH が無限大になるのを防ぐためである。Hに対して CIP 法で計算した後、逆変換して移流後のfを求める。図2のグラフから分かるように、Hがオーバーシュートしてもfは 0 や 1 に収束するのでオーバーシュートの影響を受けなくて済む。

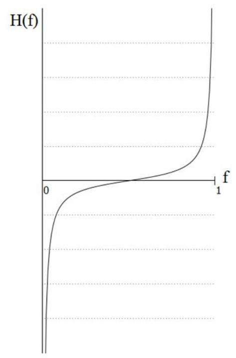

図 2　tangent 関数

5. 計算結果

クーラン数を変化させて比較した結果を図3に示す。波長40、半波長の矩形波について速度$v = 1.0$, 格子間隔$\Delta x = 1.0$, 格子点数$Nx = 150$とし、時刻$t = 70$における解を求めた。時間ステップ幅Δtの値を変えることでクーラン数Cを変化させて比較した。$C = 1.0$で厳密解と一致し、$C > 1$になると早い段階で発散し始めた。

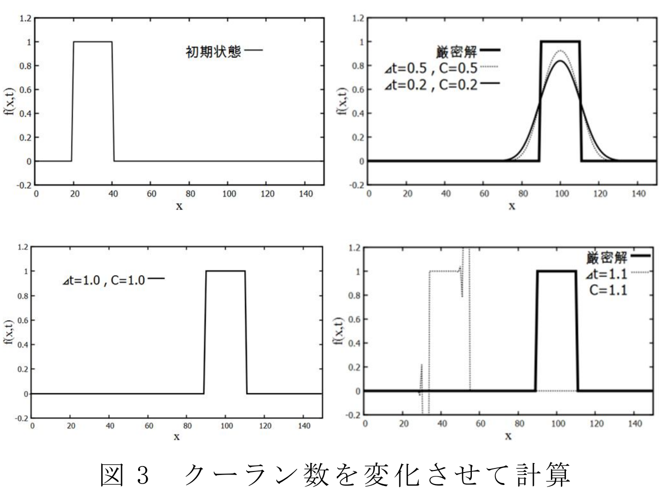

図 3　クーラン数を変化させて計算

次に、同じ条件で時間ステップ幅をΔtに固定し、1次風上差分法、ラックス・ヴェンドロフ法、CIP 法、tangent 関数変換した CIP 法を用いて計算した結果を図4に示す。

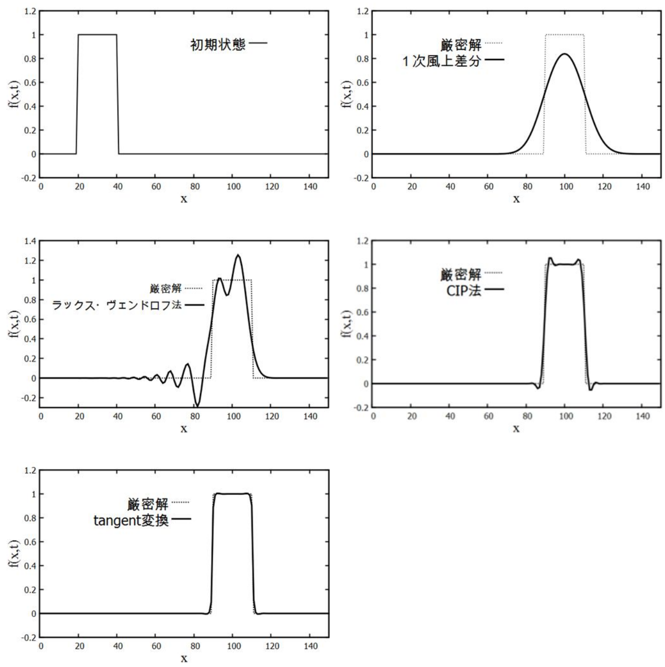

図 4　矩形波の計算結果

6. まとめと今後の課題

双曲型偏微分方程式に含まれる波動方程式を差分法で解いてダランベールの解を求めるためには補間によって格子点間の波形を復元しなければならない。線形補間する1次風上差分法では拡散を生じ、2 次補間するラックス・ヴェンドロフ法では振動を生じる。2 点の値とその微分を使って 3次補間する CIP 法は拡散や振動が無く、精度が高い差分法である。tangent 関数変換を用いることにより、シャープな境界でも問題なく計算できる。今後の課題は、2次元波動方程式への拡張である。2次元 CIP 法には、A型 CIP 法、M型 CIP 法、C型 CIP 法等の種類がある。それらの中のうち、どの場面でどの方法が適しているのかを検証していきたい。

[参考文献]

[1]矢部孝,内海隆行,尾形陽一 “CIP 法-原子から宇宙までを解くマルチスケール解法”

[2]http://homepage3.nifty.com/rikei-index01/ouyoukaiseki/huriesekibun2.html

[3]http://tenmei.cocolog-nifty.com/matcha/2011/09/post-2709.html