イプシロンデルタ論法について*

山田哲也†

1　はじめに

はじめまして．昨年 9 月に一般科目教室自然科学系の教員として赴任しました山田哲也*1です．教科は数学です．来年度から皆さんの数学の授業 (本科 1 年生から専攻科 2 年生まで) を担当することになります．どうぞ宜しくお願いします．

2　導入 –極限–

さっそく, タイトルにもあるように 2 月 10 日 (日) 放送分*2で話に出たイプシロンデルタ論法についてなるべくわかりやすくお話ししたいと思います*3.

本科 2 年生以上の皆さんは 1 変数関数の微分積分*4を既に学習していると思います．例えば, $y = \sin(x^2)$ の微分や $\int_1^e \log x \, dx$ の積分*5など, 試験前に一生懸命勉強した記憶がある人も多いのではないでしょうか*6.

ところで, 上で挙げたような例などを計算する前に, 各数学担当の教員が 1 変数関数の微分や積分の定義*7をしたこと, みなさん憶えていますか?*8　皆さんが持っている教科書

---

* この文は [2] を大いに参考にしています．一度読まれてみることをお勧めします.

† 福井工業高等専門学校　一般科目教室　自然科学系　研究室 一般科目棟 2 階

*1 他に知りたいことがあればどうぞ．すべての質問に答えられるとは限りませんが $\cdots$

*2 遅くなってしまい, すいませんでした.

*3 できるかな?

*4 1 年生の皆さんは来年, 微分積分 (解析 I) を学習します．心して勉強して下さい.

*5 上に挙げた例の微分や積分の計算はできますか？できない人は復習しましょう.

*6 試験前に慌てて勉強するのではなく, 日頃から勉強してほしいものです.

*7 定義という言葉はちょっと小難しいですが, 数学では非常に大事です．スポーツでいうとルールに相当します.

*8 忘れた人は教科書 [1] をひらいて確認してみましょう.

[1] などを見ると, 微分や積分はある関数の**極限**[*9]で定義されています. ここで, 関数の極限の定義について復習してみましょう.

定義 1 (関数の極限, [1])**.** 関数 $f(x)$ において, $x > 0$ が限りなく大きくなるにつれて, $f(x)$ の値が一定の値に l に限りなく近づくものとする. このとき, l を x が正の無限大に近づくときの $f(x)$ の極限[*10]といい,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \qquad \text{または} \qquad f(x) \to l \quad (x \to \infty)$$

と表す.

以上が教科書 [1] に書いてある極限の定義です. では, 上の定義をちょっとながめてみましょう. 何の気なしにながめると, 一見よさそうな定義です. しかし, 紙に穴が開くぐらいじーとみてみます. すると, 曖昧な文章があることに気が付きます[*11]. それは

> $x > 0$ が限りなく大きくなるにつれて, $f(x)$ の値が一定の値に l に限りなく近づく.[*12]

という一文です. その一文の内容を簡単にいえば, 「x が限りなく大きくなるとき, $f(x)$ が l に限りなく近づく」ということになります. さて, これは一体どういう意味でしょうか？もちろん, 上の定義 1 のどこをみてもその意味は書いてありません.

そこで, 関数の極限を正確に扱う方法として知られているのが, **イプシロンデルタ論法**と呼ばれる方法です. これからこのイプシロンデルタ論法に関する具体的な説明をしたいと思います.

3 イプシロンデルタ論法

いよいよ本題のイプシロンデルタ論法の説明に入ります. イプシロンとデルタというのはなんのことはない単なるギリシャ文字[*13]です. それぞれ ε, δ と表します. これ以降, よく使う文字です. 皆さん, 憶えておいて下さい.

---

*9 つまり, $\lim$ のことです.

*10 教科書 [1] とは少し違った表現ですが意味は同じです. また, $\lim_{x\to a} f(x)$ や $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ などの極限も定義 1 のような形で教科書 [1] では定義されています.

*11 これに気づくには, 相当な学力が必要です. 自分も大学で数学を学ぶまで定義 1 を受け入れていました. もしより進んだ微分積分を学びたい方はいれば, 本など紹介しますので山田の研究室までどうぞ.

*12 昔はこの方法で極限を扱ったため, 間違った結論が導かれることが多かったそうです.

*13 他にも α(アルファ), β(ベータ), γ(ガンマ) などがあります.

3.1 具体例の考察

いきなり「イプシロンデルタ論法とは」と続けると, この文の読者がいなくなってしまうので, 次の簡単な例を考えることから始めましょう.

例 1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$.

例 1 の答えは 0 だということは皆さんよくご存知だと思います. これで極限が求められて終わりであれば, この文を書く必要性はなくなります. せっかく書いているので, ここでは視点をちょっと変えて次の問題を考えてみることにします[*14].

問題 1. 次の問いに答えなさい. ただし $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とする.

(1) $\varepsilon=10^{-2}$ とする. このとき $|f(x)|<\varepsilon$ となるような正の実数 δ を 1 つ求めよ.
(2) $\varepsilon=10^{-10}$ とする. このとき $|f(x)|<\varepsilon$ となるような正の実数 δ を 1 つ求めよ.

解答. (1): $|f(x)|=x^{-1}<10^{-2}$ より $x>10^2=100$ となる. 従って, 例えば $\delta=101$ を取ると, δ は $|f(x)|<10^{-2}$ を満たす. (2): (1) と同様にすれば, $\delta=10000000001$ と取ればよいことがわかる. □

さて, 問題 1 の解答を穴が開くまでじーとみてみましょう. 以下のことがわかると思います.

(i) $\delta>0$ は $\varepsilon>0$ の値によって決まり, ε が小さくなればなるほど, δ の値は限りなく大きくなる.
(ii) $x>101$ ならば, $|f(x)|=x^{-1}<101^{-1}<100^{-1}=10^{-2}$ が成り立つので, $x>100$ ならば $|f(x)|<10^{-2}$ となる. つまり, $x>101$ ならば x^{-1} の値は 10^{-2} よりも小さい値である. 同様に, $x>10000000001$ ならば, x^{-1} の値は 10^{-10} よりも小さい値である.

よって, 次のことが予想されます[*15].

とても小さい正の実数 ε を任意に 1 つ決めたとき, すべての $x>\delta$ に対して $|f(x)|<\varepsilon$ となるようなとても大きい正の実数 δ がある. (♠)

[*14] 唐突ですが ...
[*15] 実際に, 予想は正しいことがわかります. 興味がある方は是非やってみて下さい.

ここで, (♠) の意味を考えてみましょう．とても小さい実数 $\varepsilon > 0$ をますます小さくすると, ε に依存して $\delta > 0$ は限りなく大きな数になるのだから, (♠) の表現は x **が限りなく大きければ** $f(x)$ **の値は** 0 **に限りなく近い**というふうに解釈することができます．従って, 関数の極限を正確に扱うには, さきほど挙げた定義 1 の曖昧な表現を

> (とても小さい) 正の実数 ε を任意に 1 つ決めたとき, すべての $x > \delta$ に対して $|f(x)| < \varepsilon$ となるような (とても大きい) 正の実数 δ がみつかるか?

という具体的な問題に帰着させればよいのです.

3.2 関数の極限の定義

以上を踏まえて, 関数の極限を新たに定義し直します.

定義 2 (イプシロンデルタ論法)**.** 任意の正の実数 ε に対して, 以下の性質を満たす正の実数 δ[*16]が存在するとき, l を x が正の無限大に近づくときの $f(x)$ の極限であるという.

$$\text{すべての } x > \delta \text{ に対して } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

4 最後に

いかがでしたでしょうか? もしわからないことがあれば, 山田のところまで質問[*17]にいらして下さい．また, これを読んで興味を持たれた方はイプシロンデルタ論法に関する本は色々出ていますので, どれか 1 冊手に取って勉強することをお勧めします.

参考文献

[1] 新井・碓氷・斎藤・鈴木・高遠・山本, 新訂 微分積分 I 大日本図書 (2003) 1–157.

[2] http://wwwmain.h.kobe-u.ac.jp/ kuwamura/epsilon.pdf

[3] http://ja.wikipedia.org/wiki/イプシロン-デルタ論法

[*16] δ は ε によって決まることに注意しよう.

[*17] その他, 数学の質問も随時受け付けます．わからないところは早めに解決しましょう.